OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS FORHANDLINGER. 1913. N° 4

OM ADDITION AF UENDELIG MANGE KONVEKSE KURVER

AF

HARALD BOHR

Indledning.

Ved en Undersøgelse over en vis almindelig Klasse af uendelige Rækker[1] førtes jeg til følgende Opgave: Lad der være givet uendelig mange positive Tal $\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_n, \ldots$ saaledes, at $\sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_n$ er konvergent. Hvilke Værdier antager da Funktionen $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_n e^{i\varphi_n}$, naar de reelle Tal $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ uafhængig af hinanden gennemløber alle Værdier fra $-\infty$ til $+\infty$, eller, hvad der øjensynlig kommer ud paa det samme, alle Værdier fra 0 (incl.) til 2π (excl.)?

Som man meget let viser, gælder her følgende Sætning:

1) Hvis der i Talfølgen $\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_n, \ldots$ ikke eksisterer noget Element ς_n, der er større end Summen af alle de andre, antager Funktionen F alle Værdier z, for hvilke $|z| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_n$, og ingen andre; altsaa enhver kompleks Værdi, hvis Billede i den komplekse Plan er beliggende indenfor eller paa Randen af en Cirkel med Centrum i Begyndelsespunktet og Radius $\sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_n$.

2) Hvis der derimod i Talfølgen $\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_n, \ldots$ findes et Element ς_N, der er større end Summen af alle de andre, antager

[1] Lösung des absoluten Konvergenzproblems einer allgemeinen Klasse Dirichletscher Reihen (som snart vil fremkomme i Acta Matematica).

Funktionen F alle Værdier z, for hvilke $\varsigma_N - \sum_{n \neq N} \varsigma_n \leq |z| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_n$, og ingen andre; altsaa enhver kompleks Værdi, hvis Billede i den komplekse Plan er beliggende indenfor eller paa Randen af en Cirkelring med Centrum i Begyndelsespunktet, og hvis ydre og indre Radius er henholdsvis $\sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_n$ og $\varsigma_N - \sum_{n \neq N} \varsigma_n$.

Idet det til Tallet $\varsigma_n e^{i\varphi_n}$ svarende Punkt i den komplekse Plan, naar φ_n varierer fra 0 til 2π, gennemløber en Cirkelperiferi med Centrum i Begyndelsespunktet og Radius ς_n, kan denne Sætning øjensynlig ogsaa (i ikke helt præcis Formulering) udsiges saaledes:

Den Punktmængde M i den komplekse Plan, der fremkommer ved Addition af uendelig mange Cirkler C_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) med Centrum i Begyndelsespunktet, og for hvilke Summen af Radierne danner en konvergent Række, (idet herved forstaas den Punktmængde M, der svarer til Mængden af alle komplekse Tal $z = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$, hvor z_n er det til et vikaarligt Punkt paa den n^{te} Cirkel svarende komplekse Tal) danner enten det Indre af en Cirkel (incl. Rand) med Centrum i Begyndelsespunktet, eller det Indre af en Cirkelring (incl. Rand) omkring Begyndelsespunktet.

Ved en Undersøgelse over visse i den analytiske Primtalteori forekommende Funktioner førtes jeg til følgende almindeligere Problem, nemlig til at undersøge, hvilken Punktmængde der fremkommer ved en Addition som den ovenfor betragtede, ikke længer specielt af uendelig mange Cirkler med Centrum i Begyndelsespunktet, men almindeligere af uendelig mange vilkaarlige lukkede konvekse Kurver.

Svarende til den ovenfor omtalte specielle Sætning om Addition af uendelig mange Cirkler, beviste jeg i Almindelighed, at den Punktmængde i den komplekse Plan, der fremkommer ved Addition af uendelig mange lukkede konvekse Kurver, enten er det Indre (incl. Rand) af en lukket konveks

Kurve, eller et Omraade (incl. Rand) begrændset af to indenfor hinanden liggende lukkede konvekse Kurver.

Det er denne Sætning i nøjagtig Formulering og Beviset derfor, som jeg skal tillade mig at meddele i den foreliggende Afhandling.

Idet Sætningen i Virkeligheden er en ren geometrisk Sætning, har jeg foretrukket at føre Beviset i sin naturlige geometriske Form, fremfor gennem Indførelsen af komplekse Tal at iklæde Sætningen og Beviset en arithmetisk Skikkelse.

I § 1 meddeles nogle almindelige orienterende Bemærkninger om Addition af uendelig mange Punktmængder; § 2 omhandler Addition af to lukkede konvekse Kurver; endelig behandles i § 3 Addition af uendelig mange lukkede konvekse Kurver.

I en senere Afhandling skal jeg anvende Resultaterne af den foreliggende Undersøgelse paa de i den analytiske Primtaltheori forekommende Funktioner, specielt paa den Riemannske Zetafunktion.

§ 1. Nogle almindelige Bemærkninger om Addition af uendelig mange Punktmængder.

Lad i en Plan, med Begyndelsespunkt O, p_1 og p_2 være to givne Punkter; jeg vil da paa sædvanlig Maade ved Summen $p_1 + p_2$ forstaa det Punkt i Planen, der bestemmes som modstaaende Vinkelspids til O i det Parallelogram, hvor p_1 og p_2 er de to andre Vinkelspidser. Begrebet Sum af to Punkter udvides umiddelbart til Begrebet Sum af et vilkaarligt endeligt Antal Punkter. Lad $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ være en given uendelig Følge af Punkter i Planen; den „uendelige Række“ $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ skal da siges at være konvergent og dens Sum at være Punktet p, hvis Punktet $q_N = \sum_{n=1}^{N} p_n$, naar N vokser ud over alle Grændser, nærmer sig til det endelige og bestemte Grændsepunkt p, d. v. s. hvis $\lim_{N=\infty} q_N = p$.

Lad M_1 med Elementer (Punkter) m_1 og M_2 med Elementer m_2 være to givne Punktmængder i Planen; jeg vil da ved Summen $M_1 + M_2$ betegne den Punktmængde, hvis Elementer er alle Punkter af Formen $m_1 + m_2$, med andre Ord: Punktmængden $M_1 + M_2$ indeholder ethvert Punkt, der kan dannes som Sum af et Element i M_1 og et Element i M_2, og ingen andre. Bestaar f. Ex. M_1 af alle Punkter paa det rette Liniestykke OA (Endepunkterne medregnede), og M_2 af alle Punkter paa det rette Liniestykke OB (Endepunkterne medregnede), bestaar $M_1 + M_2$ af alle Punkter indenfor og paa Begrændsningen af det Parallelogram, der har A og B til to modstaaende Vinkelspidser og en tredie Vinkelspids faldende i O. Bestaar f. Ex. M_1 af alle Punkter paa en Cirkelperiferi med Centrum i O og Radius ς_1, og M_2 af alle Punkter paa en Cirkelperiferi med Centrum i O og Radius $\varsigma_2 \leqq \varsigma_1$, bestaar $M_1 + M_2$, som man meget let ser, af alle Punkter indenfor og paa Randen af en Cirkelring med Centrum i O, og hvis ydre og indre Radius er henholdsvis $\varsigma_1 + \varsigma_2$ og $\varsigma_1 - \varsigma_2$, o. s. fr.

Begrebet Sum af to Punktmængder udvides umiddelbart til Begrebet Sum af et vilkaarligt endeligt Antal Punktmængder; er $M_1, M_2, \ldots, M_n$ Punktmængder, hvis Elementer henholdsvis betegnes med $m_1, m_2, \ldots, m_n$, bestaar Punktmængden $M_1 + M_2 + \ldots + M_n$ af alle Punkter $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ (hvert Punkt kun medregnet én Gang), og ingen andre.

Lad der være givet en uendelig Følge af Punktmængder, M_1 med Elementer m_1, M_2 med Elementer m_2, ..., M_n med Elementer m_n, ... Den uendelige Række $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ skal da siges at være konvergent, hvis enhver uendelig Række $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n$ (hvor m_n er et vilkaarligt Punkt i M_n) er konvergent, og $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ skal, hvis den er konvergent, siges at fremstille (have Summen) M, hvor M er den Punktmængde, hvis Elementer m er alle Punkter af Formen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n$ (hvert Punkt kun medregnet én Gang), og ingen andre.

Er $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ konvergent, er det muligt til ethvert $\varepsilon > 0$ at finde et helt positivt Tal $N = N(\varepsilon)$, saaledes at Punktet $\sum_{n=N_1}^{N_1+p} m_n$, for $N_1 \geqq N$ og $p \geqq 0$, stedse (d. v. s. hvordan end m_n er udvalgt blandt Elementerne i M_n) ligger indenfor en Cirkel med Begyndelsespunktet O som Centrum og Radius ε (man kunde udtrykke dette ved at sige, at den uendelige Række $\sum_{n=1}^{\infty} m_n$, hvor m_n gennemløber Punktmængden M_n, er ligelig konvergent); thi i modsat Fald maatte der eksistere et bestemt Tal $e > 0$ med følgende Egenskab: der eksisterer en Følge af hele positive Tal $N_1 \leqq N_1 + p_1 < N_2 \leqq N_2 + p_2 < \ldots < N_r \leqq N_r + p_r < \ldots$ og en dertil svarende Punktfølge $m_1', m_2', \ldots, m_n', \ldots$ (hvor m_n' er Element i M_n) saaledes, at for alle $r = 1, 2, \ldots$ Punktet $\sum_{n=N_r}^{N_r+p_r} m_n'$ ligger udenfor eller paa Randen af Cirklen med O som Centrum og Radius e; men heraf vilde umiddelbart følge, at den uendelige Række $\sum_{n=1}^{\infty} m_n'$ ikke var konvergent, i Modstrid med Antagelsen om, at enhver uendelig Række $\sum_{n=1}^{\infty} m_n$ er konvergent.

Af denne Bemærkning følger specielt, at der, hvis $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ er konvergent, til ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et helt Tal $N = N(\varepsilon)$ saaledes, at for $n \geqq N$ Punktmængden M_n er beliggende helt indenfor en Cirkel med O som Centrum og Radius ε.

Endvidere følger let, at hvis $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ er konvergent, og enhver af Punktmængderne M_n $(n = 1, 2, \ldots)$ er beliggende helt i det Endelige, d. v. s. indenfor en Cirkel med O som Centrum og Radius r_n (i Følge den foregaaende Bemærkning vil da alle Punktmængderne M_n ogsaa ligge indenfor en Cirkel med O som Centrum og fast (d. v. s. af n uafhængig) Radius) vil Punktmængden $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ ligeledes være beliggende helt i det Endelige.

Endelig kan bemærkes, at hvis $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ er konvergent og

M_n $(n=1,2,\ldots)$ beliggende helt i det Endelige, samt hvis endvidere enhver af Punktmængderne M_n $(n=1,2,\ldots)$ er afsluttet (d. v. s. indeholder sine Grændsepunkter), vil Punktmængden $M=\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ ligeledes være en afsluttet Punktmængde. Lad nemlig p være et Grændsepunkt for Punktmængden M; da er p Grændsepunkt for en Punktfølge $m^{(q)}=\sum_{n=1}^{\infty} m_n^{(q)}$ $(q=1,2,\ldots)$, hvor $m_n^{(q)}$ er Element i M_n. Idet imidlertid alle Punkter $m_n^{(q)}$ er beliggende indenfor en Cirkel med Centrum i O og fast Radius, vil der i Følge en bekendt Sætning om Dobbeltfølger eksistere en saadan Følge af hele positive Tal $q_1, q_2, \ldots, q_r, \ldots$, at, for ethvert fast $n=1,2,\ldots$, $\lim_{r=\infty} m_n^{(q_r)}$ eksisterer og følgelig er lig et Punkt m_n i den afsluttede Punktmængde M_n; og her vil øjensynlig Punktet $m=\sum_{n=1}^{\infty} m_n$ (paa Grund af den ligelige Konvergens af $\sum_{n=1}^{\infty} m_n^{(q)}$) være Grændsepunkt for Punktfølgen $m^{(q_r)}$ $(r=1,2,\ldots)$, d. v. s. $\lim_{r=\infty} m^{(q_r)}=m$. Følgelig vil Punktet p være lig Punktet m og altsaa være Element i M. Hermed er den ovenstaaende Paastand bevist. Lader jeg enhver af Punktmængderne M_n, for hvilken $n>N$, indeholde kun det ene Punkt O, følger specielt, at Summen $\sum_{n=1}^{N} M_n$ af et endeligt Antal afsluttede og helt i det Endelige beliggende Punktmængder $M_1, M_2, \ldots, M_N$ vil være en afsluttet Punktmængde. [Fordringen om at Punktmængderne M_n skal være helt i det Endelige beliggende er væsentlig, d. v. s. Sætningen vil ikke bevare sin Gyldighed, hvis denne Betingelse udelades. Saaledes vil f. Ex., hvis a_1 og a_2 er to positive Tal, for hvilke $a_1 : a_2$ er et irrationalt Tal, og hvis M_1 og M_2 er to Punktmængder, hvis Elementer alle er beliggende paa en ret Linie L gennem Begyndelsespunktet O, saaledes at M_1 indeholder alle de Punkter m_1 paa L, for hvilke Afstanden Om_1 (regnet med Fortegn i Overensstemmelse med en valgt positiv Retning paa L) er lig na_1, hvor n er et vilkaarligt helt Tal $\gtreqless 0$, medens M_2 indeholder alle de Punkter m_2 paa L, for hvilke Afstanden Om_2 (regnet med Fortegn) er lig na_2, hvor n er et helt Tal $\gtreqless 0$, enhver af Punktmængderne M_1 og M_2 være en afsluttet Punktmængde, medens $M_1 + M_2$ vil være en Punktmængde, der ligger overalt tæt paa Linien L uden at indeholde noget Kontinuum, altsaa en ikke afsluttet Punktmængde].

Lad $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ være en uendelig Følge af Punktmængder, saaledes at $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ er konvergent; jeg vil da sammen med Punktmængden $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ betragte den anden Punktmængde M^*, hvis Elementer er alle saadanne Punkter m^*, for hvilke der til ethvert $\varepsilon > 0$ svarer et helt Tal n_1 saaledes, at enhver af Punktmængderne $L_N = \sum_{n=1}^{N} M_n$ $(N \geqq n_1)$ indeholder mindst ét Punkt l_N, hvis Afstand fra m^* er mindre end ε (eller, hvad der øjensynlig er ensbetydende hermed, alle saadanne Punkter m^*, for hvilke det er muligt at udtage et Punkt l_r i Punktmængden $L_r = \sum_{n=1}^{r} M_n$ saaledes, at $\lim_{r=\infty} l_r = m^*$).

Man indser meget let udfra denne Definition, at Punktmængden M^* maa være en afsluttet Punktmængde.

Endvidere indses umiddelbart, at ethvert Element m i Punktmængden $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ maa tilhøre Punktmængden M^*; thi idet $m = \sum_{n=1}^{\infty} m_n$, er m Grændsepunkt for Punktfølgen $l_r = \sum_{n=1}^{r} m_n$, d. v. s. $m = \lim_{r=\infty} l_r$. Derimod behøver ikke omvendt alle Punkter i M^* at være Elementer i M; dette følger allerede deraf, at M (i Modsætning til M^*) ikke behøver at være en afsluttet Punktmængde. (Er f. Ex. M_1 en ikke afsluttet Punktmængde, medens M_n for $n \geqq 2$ kun indeholder det ene Punkt O, er M øjensynlig lig M_1 og følgelig ikke afsluttet). Derimod vises let, at ethvert Punkt m^* i M^* enten tilhører M eller er Grændsepunkt for M, eller, hvad der udtrykker det samme, at der, hvis m^* er et vilkaarligt Element i M^* og $\varepsilon > 0$ et vilkaarligt lille Tal, findes mindst ét Punkt i Punktmængden M, hvis Afstand fra m^* er mindre end ε. Rigtigheden af denne sidste Paastand indses saaledes: Lad $m'_1, m'_2, \ldots, m'_n, \ldots$ være en fast valgt Punktfølge, hvor m'_n er Element i M_n; idet $\sum_{n=1}^{\infty} m'_n$ er konvergent, kan vi vælge et Tal N saa stort, at for $N_1 \geqq N$ er Punktet $\sum_{n=N_1+1}^{\infty} m'_n$ beliggende indenfor en Cirkel med O som Centrum og Radius $\frac{\varepsilon}{2}$. Idet m^* er Element i M^* kan vi, i Følge Definitionen for M^*, efter at N er fastlagt, vælge et fast Tal $N_1 \geqq N$ og dertil svarende Elementer m''_1 i M_1, m''_2 i $M_2, \ldots, m''_{N_1}$ i M_{N_1} saaledes, at Punktet $l_{N_1} = \sum_{n=1}^{N_1} m''_n$'s Afstand fra Punktet m^* er mindre end $\frac{\varepsilon}{2}$; da vil øjensynlig Punktet $\sum_{n=1}^{N_1} m''_n + \sum_{n=N_1+1}^{\infty} m'_n$ være et Punkt i M, hvis Afstand fra m^* er mindre end ε, q. e. d.

Af det ovenstaaende følger umiddelbart, at hvis $M = \sum_1^{\infty} M_n$ er en afsluttet Punktmængde (altsaa specielt, hvis de enkelte Punktmængder M_n i den konvergente Række $\sum_1^{\infty} M_n$ er afsluttede og helt i det Endelige beliggende Punktmængder), er $M = M^*$.

Den uendelige Række $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$, hvor de enkelte Punktmængder M_n antages beliggende helt i det Endelige, kaldes ubetinget konvergent, hvis det er muligt, for ethvert $n = 1, 2, \ldots$, at indeslutte Punktmængden M_n indenfor en Cirkel med Centrum i O og Radius r_n saaledes, at $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ er konvergent. En ubetinget konvergent Række $\sum_1^{\infty} M_n$ er øjensynlig ogsaa konvergent. [Et Exempel paa en konvergent men ikke ubetinget konvergent Række $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ er f. Ex. den Række $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$, hvor Punktmængden M_n ($n = 1, 2, \ldots$) kun indeholder et enkelt Punkt m_n og hvor alle Punkter m_n ($n = 1, 2, \ldots$) er beliggende paa en ret Linie

gennem Begyndelsespunktet med positiv Retning L, saaledes at Afstanden fra O til m_n regnet med Fortegn er lig $\frac{(-1)^n}{n}$].
I en ubetinget konvergent Række er øjensynlig Leddenes Orden ligegyldig, d. v. s. Rækken vedbliver at være ubetinget konvergent og fremstille den samme Punktmængde efter en vilkaarlig Omordning af dens Led.

Enhver uendelig konvergent Række $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$, hvis enkelte Led M_n er beliggende helt i det Endelige, og hvor Begyndelsespunktet O tilhører enhver af Punktmængderne M_n $(n = 1, 2, \ldots)$ er ubetinget konvergent.

Lad ς_n betegne Maximum af Afstanden $\overline{Om_n}$, hvor m_n gennemløber Punktmængden M_n; den ovenstaaende Paastand er da øjensynlig identisk med Paastanden: $\sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_n$ er konvergent. Konvergensen af $\sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_n$ bevises saaledes: Lad os antage $\sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_n$ divergent. Gennem Punktet O trækkes da tre Halvlinier L_1, L_2 og L_3 saaledes, at (idet der fastlægges en positiv Omløbsretning i Planen) $\angle L_1 L_2 = \angle L_2 L_3 = \angle L_3 L_1 = 120°$.

Lad henholdsvis $\varsigma_{n,1}$, $\varsigma_{n,2}$ og $\varsigma_{n,3}$ betegne Maksimum af Afstanden $\overline{Om_n}$, idet m_n gennemløber den Punktmængde (indeholdende mindst det ene Punkt O), der bestaar af alle de Punkter tilhørende Punktmængden M_n, der er beliggende indenfor eller paa Randen henholdsvis af Vinkelaabningen OL_1L_2, OL_2L_3 og OL_3L_1. Da i det mindste et af Tallene $\varsigma_{n,1}$, $\varsigma_{n,2}$ $\varsigma_{n,3}$ er lig Tallet ς_n (altsaa $\varsigma_n \leqq \varsigma_{n,1} + \varsigma_{n,2} + \varsigma_{n,3}$) og idet $\sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_n$ er antaget divergent, kan ikke alle tre uendelige Rækker $\sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_{n,1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_{n,2}$ og $\sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_{n,3}$ være konvergente; lad os f. Ex. antage, at $\sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_{n,1}$ er divergent. Lad m_n' være et saadant (sikkert eksisterende) Punkt tilhørende Punktmængden M_n og beliggende indenfor eller paa Begrændsningen af Vinkelrummet OL_1L_2, at Afstanden $\overline{Om_n'} \geqq \frac{1}{2}\varsigma_{n,1}$; lad L betegne den Halvlinie ud fra O, der halverer $\angle L_1 L_2$, og lad l_n være Projektionen af Punktet m_n' paa Halvlinien L. Da er Afstanden $\overline{O l_n} \geqq \overline{O m_n'} \cdot \cos(60°) \geqq \frac{1}{4} \varsigma_{n,1}$. Følgelig er, idet Punkterne l_n $(n = 1, 2, \ldots)$ alle er beliggende paa Halvlinien L, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ divergent. Paa den anden Side følger imidlertid umiddelbart, idet l_n er Projektion af m_n' paa den faste Halvlinie L, og idet $\sum_{n=1}^{\infty} m_n'$ i Følge Forudsætning er konvergent, at $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ maa være konvergent. Vor Antagelse $\sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_n$ divergent har altsaa ført os til en Modstrid; følgelig er $\sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_n$ konvergent, d. v. s. $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ er ubetinget konvergent, q. e. d.

Ved Hjælp af det foregaaende Resultat kan vi nu umiddelbart bevise Rigtigheden af følgende Sætning: *Lad M_n $(n = 1, 2, \ldots)$ være en helt i det Endelige beliggende Punktmængde og lad $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ være konvergent. Der eksisterer da en Punktfølge $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, hvor $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ er konvergent, og en dertil svarende Følge af positive Tal $r_1, r_2, \ldots r_n, \ldots$, hvor $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ er konvergent; med følgende Egenskab: Punktmængden M_n $(n = 1, 2, \ldots)$ er helt beliggende indenfor en Cirkel med c_n som Centrum og Radius r_n.*

Bevis: Lad c_n være et vilkaarligt Punkt i M_n; da er $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent. Lad M_n' være den Punktmængde, der fremkommer ved at parallelforskyde Punktmængden M_n, saaledes at Punktet c_n falder i Begyndelsespunktet O. Idet $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ er konvergent, vil da, som man umiddelbart indser, den uendelige Række $\sum_{n=1}^{\infty} M_n'$ være konvergent. Da endvidere enhver af Punktmængderne M_n' $(n = 1, 2, \ldots)$ indeholder Punktet O, vil $\sum_{n=1}^{\infty} M_n'$ være ubetinget konvergent. Følgelig vil Punktmængden M_n' være helt indeholdt i en Cirkel med Centrum i Begyndelsespunktet og Radius r_n, hvor $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ er konvergent; men heraf følger umiddelbart, at Punktmængden M_n maa være indeholdt i en Cirkel med c_n som Centrum og Radius r_n. Hermed er den ovenstaaende Sætning bevist.

Jeg skal slutte denne Paragraf med nogle faa Bemærkninger om den uendelige Række $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$, hvor enhver af Punktmængderne er en JORDAN'sk Kurve[1]. Da M_n i dette Tilfælde er afsluttet og beliggende helt i det Endelige, vil $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$, hvis den er konvergent, ligeledes være afsluttet og helt i det Endelige beliggende, og Punktmængden $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ vil være identisk med Punktmængden M^*.

Lad $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ være konvergent; der eksisterer da, som ovenfor bevist, en Punktfølge c_n, hvor $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ er konvergent, og en positiv Talfølge r_n, hvor $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ er konvergent, saaledes at Kurven M_n er helt beliggende indenfor en Cirkel C_n med c_n som Centrum og Radius r_n. Heraf drages følgende Slutninger: 1) Hvis Begyndelsespunktet O er beliggende indenfor enhver af Kurverne M_n $(n = 1, 2, \ldots)$, vil $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ være ubetinget konvergent; thi idet Punktet O er beliggende indenfor Kurven M_n og følgelig ogsaa indenfor Cirklen C_n, vil denne Cirkel og følgelig yderligere Kurven M_n være beliggende helt indenfor en Cirkel med Centrum i O og Radius $2r_n$. 2) Lad p_n være et vilkaarligt Punkt indenfor M_n; da vil p_n ligeledes være beliggende indenfor Cirklen C_n; følgelig vil, som

[1] Ved en JORDAN'sk Kurve forstaas som bekendt en lukket kontinuert Kurve uden Dobbeltpunkter, eller præcisere: en Punktmængde, der kan afbildes énéntydig og kontinuert paa en Cirkelperiferi. En JORDAN'sk Kurve deler som bekendt Mængden af alle de af Planens Punkter, der ikke er beliggende paa selve Kurven, i to Omraader, et indenfor Kurven og et udenfor Kurven beliggende Omraade. Kurven selv danner Begrændsningen mellem Omraadet af indre og Omraadet af ydre Punkter.

man umiddelbart indser, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ være konvergent. Lad M'_n være den Punktmængde (JORDAN'ske Kurve), der fremkommer ved at parallelforskyde Kurven M_n saaledes, at Punktet p_n (der tænkes i fast Forbindelse med M_n) falder i Begyndelsespunktet O (der tænkes fast). Da vil den uendelige Række $\sum_{n=1}^{\infty} M'_n$ være konvergent, og Punktmængden $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ vil umiddelbart fremkomme af Punktmængden $M' = \sum_{n=1}^{\infty} M'_n$ ved at parallelforskyde denne sidste Punktmængde saaledes, at Punktet O (der nu tænkes i fast Forbindelse med M') falder i Punktet $p = \sum_{n=1}^{\infty} p_n$ (idet dette sidste Punkt tænkes fastliggende). Af denne sidste Bemærkning følger aabenbart, at man ved en Undersøgelse over Addition af uendelig mange lukkede kontinuerte Kurver, uden at indskrænke Undersøgelsens Almindelighed tør antage, at Begyndelsespunktet O er beliggende indenfor enhver af Kurverne.

§ 2. Addition af to konvekse Kurver.

Ved en lukket konveks Kurve, eller simpelthen ved en konveks Kurve, forstaas en JORDAN'sk Kurve med følgende Egenskab: Hvis en ret Linie har mer end to Punkter fælles med Kurven, vil de for Kurven og den rette Linie fælles Punkter være samtlige Punkter paa et Liniestykke AB (Endepunkterne medregnede). Heraf følger specielt, at en ret Linie, der indeholder et indenfor Kurven beliggende Punkt, vil skære Kurven i to og kun to Punkter (denne Egenskab kunde iøvrigt ogsaa være lagt til Grund for den konvekse Kurves Definition).

Idet vi ved et konvekst Omraade forstaar en saadan Punktmængde i Planen, at den, hvis den indeholder de to Punkter A og B, indeholder hele Liniestykket AB, er den ovenstaaende Definition som bekendt identisk med følgende anden Definition: En konveks Kurve er Begrændsningen[1] for et konvekst Omraade, der er beliggende helt i det Endelige, uden at være beliggende helt paa en ret Linie.

Ved Arealet af en konveks Kurve vil vi i det følgende forstaa det (altid eksisterende) Areal af det indenfor Kurven beliggende Omraade.

Lad M_1 og M_2 være to konvekse Kurver, saaledes at Begyndelsespunktet O er beliggende indenfor begge Kurver, og saaledes at Arealet af $M_1 \geqq$ Arealet af M_2. Jeg vil da i denne Paragraf undersøge den Punktmængde $M_1 + M_2$, der fremkommer ved Addition af de to konvekse Kurver.

I den følgende Undersøgelse vil jeg med $\div M_2$ betegne den Punktmængde, hvis Elementer m' er karakteriserede ved følgende Egenskab: der findes svarende til m' et Element m_2 i M_2, saaledes at $m' + m_2 = O$; med andre Ord, $\div M_2$ er den Punktmængde, der fremkommer, naar M_2 drejes 180° om Begyndelsespunktet O; $\div M_2$ vil følgelig være en konveks Kurve med samme Areal som M_2 og ligeledes indeholdende Punktet O i sit Indre. Endvidere vil jeg, idet l er et vilkaarligt givet Punkt i Planen, ved $N(l)$ forstaa den Punktmængde, der fremkommer af $\div M_2$, naar denne sidste Punktmængde parallelforskydes saaledes, at Punktet O (der tænkes i fast Forbindelse med $\div M_2$) falder i Punktet l (der tænkes fastliggende). $N(l)$ er følgelig en konveks Kurve med samme Areal som M_2 og indeholdende Punktet l i sit Indre. Med denne Betegnelse vil det øjensynlig være en nødvendig og tilstrækkelig Betingelse for at Punktet l hører med til Punktmængden $M_1 + M_2$ (d. v. s. for at der eksisterer et Element m_1 i M_1 og et Element m_2 i M_2 saaledes, at $m_1 + m_2 = l$), at Kurverne M_1 og $N(l)$ skærer hinanden (d. v. s. har mindst ét Punkt fælles).

[1] Et Punkt p siges at tilhøre Begrændsningen for en given Punktmængde M, hvis der indenfor enhver Cirkel med Centrum i p og vilkaarlig lille Radius findes saavel Punkter tilhørende Punktmængden M som Punkter ikke tilhørende M.

Ved Benyttelse af denne Bemærkning indses umiddelbart, at ethvert Punkt l paa Kurven M_1 maa tilhøre Punktmængden $M_1 + M_2$; thi i modsat Tilfælde vilde de to Kurver M_1 og $N(l)$ ingen Punkter have fælles; følgelig maatte $N(l)$ enten ligge helt indenfor M_1, eller ligge helt udenfor M_1, eller ogsaa maatte M_1 ligge helt indenfor $N(l)$; men intet af disse tre Tilfælde kan indtræffe, thi, idet Punktet l ligger paa Kurven M_1 men indenfor Kurven $N(l)$, er de to første Muligheder udelukkede, og idet Arealet af $M_1 \geqq$ Arealet af $M_2 =$ Arealet af $N(l)$ er ogsaa den tredje Mulighed udelukket. Hermed er Paastanden om, at ethvert Punkt paa Kurven M_1 tilhører Punktmængden $M_1 + M_2$, bevist.

For den senere Undersøgelse vil følgende videregaaende Bemærkning være af Vigtighed: Lad e_2 betegne Minimum af Afstanden $\overline{Om_2}$, idet m_2 gennemløber Kurven M_2 (da er e_2 tillige Minimum af Afstanden $\overline{ln}$, idet n gennemløber Kurven $N(l)$), og lad m_1 være et vilkaarligt Punkt paa Kurven M_1; da vil ethvert Punkt l i Planen, hvis Afstand fra m_1 er mindre end e_2, tilhøre Punktmængden $M_1 + M_2$. Rigtigheden af denne Bemærkning indses ved Benyttelse af ganske samme Slutningsmaade som ovenfor, idet det bemærkes, at Kurven $N(l)$ ogsaa her vil indeholde et Punkt m_1 paa Kurven M_1 i sit Indre.

Lad L være en vilkaarlig ret Linie i Planen; jeg vil da søge at bestemme de Punkter l paa Linien L, der tilhører Punktmængden $M_1 + M_2$, altsaa de Punkter l paa Linien L, for hvilke den tilsvarende Kurve $N(l)$ skærer den faste Kurve M_1.

Lad l være et vilkaarligt Punkt paa L. Idet den tilsvarende Kurve $N(l)$ er en konveks Kurve, eksisterer der som bekendt to indbyrdes forskellige, med L parallele, rette Linier L_1 og L_2 (Kurvens Grændselinier i den ved L bestemte Retning) med følgende Egenskaber: en vilkaarlig ret Linie parallel med L vil, hvis den ligger helt udenfor Parallelstrimlen $L_1 L_2$, ikke have noget Punkt fælles med Kurven, hvis den ligger helt indenfor Parallelstrimlen $L_1 L_2$, skære Kurven i to og kun to

Punkter, og endelig, hvis den er sammenfaldende med én af Linierne L_1 og L_2, skære Kurven $N(l)$ enten i ét og kun ét Punkt eller i et Liniestykke (Endepunkterne medregnede). Idet l ligger indenfor Kurven $N(l)$, vil Linien L øjensynlig være beliggende mellem Grændselinierne L_1 og L_2.

Betragter vi alle Punkter indenfor Parallelstrimlen $L_1 L_2$ (incl. Rand) kan disse Punkter øjensynlig inddeles i følgende fire Grupper, alt efter deres Beliggenhed i Forhold til den konvekse Kurve $N(l)$.

Gruppe 1: De paa Kurven $N(l)$ beliggende Punkter.

Gruppe 2: De indenfor Kurven $N(l)$ beliggende Punkter.

Gruppe 3: Punkter, der ligger over $N(l)$ [idet vi om et Punkt p indenfor eller paa Randen af Parallelstrimlen siger, at det ligger over Kurven $N(l)$, hvis Halvlinien (Endepunktet medregnet) draget ud fra p parallel med L og til den Side, der bestemmes ved L's positive Retning, intet Punkt har fælles med Kurven $N(l)$].

Gruppe 4: Punkter der ligger under $N(l)$ [idet vi om et Punkt q indenfor eller paa Randen af Parallelstrimlen siger, at det ligger under Kurven $N(l)$ hvis Halvlinien (Endepunktet medregnet) draget ud fra q parallel med L og til den Side, der er modsat L's positive Retning, intet Punkt har fælles med Kurven $N(l)$].

Man indser umiddelbart, at hvis en kontinuert Kurve K (idet jeg ved en kontinuert Kurve forstaar en saadan Punktmængde i Planen, der kan afbildes énéntydig og kontinuert enten paa en hel Cirkelperiferi eller paa en Cirkelbue (Endepunkterne medregnede), specielt et enkelt Punkt) har alle sine Punkter beliggende indenfor Parallelstrimlen $L_1 L_2$ (incl. Rand) uden at have noget Punkt fælles med Kurven $N(l)$, maa K enten være beliggende helt i det Indre af $N(l)$, eller helt over $N(l)$, eller helt under $N(l)$.

Lad l og l' være to Punkter paa L saaledes, at Retningen fra l til l' er overensstemmende med L's positive Retning, og lad $N(l)$ og $N(l')$ være de tilsvarende (indbyrdes kongruente) konvekse Kurver; idet $N(l')$ umiddelbart fremkommer af $N(l)$ ved en Parallelforskydning bestemt i Størrelse og Retning ved Liniestykket ll', vil Kurverne $N(l)$ og $N(l')$ have de samme Grændselinier L_1 og L_2. Man indser nu umiddelbart ud fra Definitionen, at ethvert Punkt p, der ligger over $N(l')$ ogsaa maa ligge over $N(l)$, medens ethvert Punkt, der ligger under $N(l)$ ogsaa maa ligge under $N(l')$.

Efter disse indledende Bemærkninger skal jeg nu gaa over til den direkte Undersøgelse af, hvilke Punkter l paa Linien L der tilhører Punktmængden $M_1 + M_2$, altsaa af, hvilke Punkter l, der er saaledes beliggende paa Linien L, at Kurven $N(l)$ skærer Kurven M_1. Da $N(l)$ stedse (d. v. s. hvor end l er beliggende paa L) befinder sig i det Indre (incl. Rand) af den ved L_1 og L_2 bestemte Parallelstrimmel, behøver vi i denne Sammenhæng øjensynlig kun at betragte den Del af Kurven M_1, der er beliggende indenfor Parallelstrimlen $L_1 L_2$ (incl. Rand). Der kan nu indtræffe et af følgende tre Tilfælde:

Tilfælde 1: M_1 er helt beliggende udenfor Parallelstrimlen $L_1 L_2$ (incl. Rand). Da vil $N(l)$ aldrig, hvor end l er beliggende paa Linien L, have noget Punkt fælles med M_1. Følgelig indeholder Linien L i dette Tilfælde intet Punkt af Punktmængden $M_1 + M_2$.

Tilfælde 2: M_1 er enten helt beliggende indenfor Parallelstrimlen $L_1 L_2$ (excl. Rand), eller M_1 har mindst ét Punkt fælles med mindst én af Randene L_1 og L_2, uden at M_1 dog skærer enhver af Linierne L_1 og L_2 i to og kun to Punkter. I alle disse under Tilfælde 2 sammenfattede Tilfælde vil de Punkter af M_1, der er beliggende indenfor eller paa Randen af Parallelstrimlen $L_1 L_2$, øjensynlig danne en kontinuert Kurve K. Jeg vil bevise, at i dette Tilfælde 2 vil de Punkter l paa Linien L, der tilhører Punktmængden $M_1 + M_2$, danne et Liniestykke AB (Endepunkterne medregnede) specielt et enkelt Punkt. Da nemlig M_1 har mindst ét Punkt beliggende indenfor eller paa

Randen af Parallelstrimlen $L_1 L_2$, vil for det første øjensynlig mindst ét Punkt paa Linien L tilhøre Punktmængden $M_1 + M_2$, d. v. s. der findes mindst ét Punkt l paa L, for hvilket $N(l)$ indeholder et Punkt paa Kurven K. Idet endvidere enhver af Punktmængderne M_1 og M_2 og følgelig ogsaa Punktmængden $M_1 + M_2$ er en helt i det Endelige liggende afsluttet Punktmængde, vil den ovenstaaende Paastand aabenbart være bevist, naar vi har eftervist, at hvis l_1 og l_2 er to indbyrdes forskellige Punkter paa Linien L, der begge tilhører Punktmængden $M_1 + M_2$ (og hvor vi vil antage, at Retningen $l_1 l_2$ er overensstemmende med L's positive Retning), at da ethvert Punkt l_3 beliggende paa L og mellem l_1 og l_2 ligeledes vil tilhøre Punktmængden $M_1 + M_2$. Men at dette sidste vil være Tilfældet, indses umiddelbart saaledes: Idet den Del af M_1, der er beliggende indenfor Parallelstrimlen $L_1 L_2$ (incl. Rand) er en kontinuert Kurve K, maatte denne Punktmængde K, hvis den intet Punkt havde fælles med Kurven $N(l_3)$, være beliggende enten helt i det Indre af $N(l_3)$, eller helt over $N(l_3)$, eller helt under $N(l_3)$; men intet af disse tre Tilfælde kan indtræffe. For det første kan K ikke være beliggende helt i det Indre af $N(l_3)$; K har nemlig enten mindst et Punkt fælles med en af Randene af Parallelstrimlen $L_1 L_2$ (og et saadant Randpunkt kan ikke være indre Punkt for $N(l_3)$, eller ogsaa er K identisk med hele Kurven M_1 (men, idet Arealet af $M_1 \geqq$ Arealet af $M_2 =$ Arealet af $N(l)$, kan K heller ikke i dette Tilfælde være beliggende helt i det Indre af $N(l_3)$). Endvidere kan K ikke være beliggende helt over $N(l_3)$, da K da ogsaa maatte være beliggende helt over $N(l_1)$, hvad der ikke kan være Tilfældet, da K i Følge Antagelsen har Punkter fælles med $N(l_1)$. Endelig kan K ikke være beliggende helt under $N(l_3)$; thi da vilde K ogsaa være beliggende helt under $N(l_2)$, i Modstrid med at K har Punkter fælles med $N(l_2)$. Hermed er Paastanden om, at de Punkter paa Linien L, der i dette Tilfælde tilhører Punktmængden $M_1 + M_2$, udgør et Liniestykke

AB (incl. Endepunkter), specielt et enkelt Punkt A, fuldkommen bevist.

Tilfælde 3: Enhver af Linierne L_1 og L_2 skærer Kurven M_1 i to og kun to Punkter. I dette Tilfælde vil de indenfor Parallelstrimlen $L_1 L_2$ (Randen incl.) beliggende Punkter af Kurven M_1 danne to kontinuerte Kurver K_1 og K_2, som ikke har noget Punkt fælles, og saaledes at K_i $(i = 1, 2)$ skærer enhver ret Linie parallel med L og beliggende indenfor eller paa Randen af Parallelstrimlen $L_1 L_2$ i ét og kun ét Punkt, altsaa specielt skærer Linien L i ét og kun ét Punkt l_i. For at i dette Tilfælde et Punkt l paa Linien L skal tilhøre Punktmængden $M_1 + M_2$ er det nødvendigt og tilstrækkeligt, at Kurven $N(l)$ har et Punkt fælles med mindst én af de to kontinuerte Kurver K_1 og K_2. Lad os søge de Punkter l paa Linien L, for hvilke Kurven $N(l)$ har et Punkt fælles med den kontinuerte Kurve K_i $(i = 1, 2)$. Man beviser her ved Benyttelse af ganske den samme Slutningsmaade som den ved Tilfælde 2 anvendte, at de søgte Punkter l danner et Liniestykke $A_i B_i$ (Endepunkterne medregnede). Endvidere indses, at det Punkt l_i, hvori Linien L skærer den kontinuerte Kurve K_i, øjensynlig maa tilhøre Liniestykket $A_i B_i$, thi K_i vil øjensynlig skære Kurven $N(l_i)$, da K_i indeholder et Punkt (nemlig l_i), der tilhører det Indre af Kurven $N(l_i)$, uden at K_i er helt beliggende i denne Kurves Indre (K_i indeholder nemlig Punkter paa Parallelstrimlens Rand); iøvrigt indses paa ganske samme Maade, at ikke blot Punktet l_i men ogsaa alle Punkter paa L, hvis Afstand fra l_i er mindre end e_2 (hvor e_2 som tidligere betegner Minimum af Afstanden $\overline{Om_2}$ idet, m_2 gennemløber M_2) maa tilhøre Liniestykket $A_i B_i$. Hermed er bevist, at i dette Tilfælde 3 vil de Punkter af $M_1 + M_2$, der er beliggende paa Linien L, enten danne et enkelt Liniestykke AB (incl. Endepunkter), nemlig hvis $A_1 B_1$ og $A_2 B_2$ har Punkter fælles, eller to adskilte Liniestykker $A_1 B_1$ og $A_2 B_2$; i dette sidste Tilfælde vil ethvert af Liniestykkerne A_iB_i $(i = 1, 2)$ indeholde et (og kun et) Punkt paa Kurven M_1 i sit Indre.

Resumerer vi Resultaterne af den forudgaaende Undersøgelse har vi bevist følgende: Punktmængden $M_1 + M_2$ er en afsluttet og helt i det Endelige beliggende Punktmængde. En vilkaarlig ret Linie L vil, hvis den overhovedet har Punkter fælles med $M_1 + M_2$, skære denne Punktmængde enten i et enkelt Liniestykke AB (Endepunkterne medregnede) specielt i et enkelt Punkt, eller i to Liniestykker A_1B_1 og A_2B_2; i dette sidste Tilfælde vil Linien L skære Kurven M_1 i to og kun to Punkter l_1 og l_2, hvor l_1 vil tilhøre det Indre af Liniestykket A_1B_1, l_2 det Indre af Liniestykket A_2B_2. Endelig vil Punktmængden $M_1 + M_2$ indeholde ethvert Punkt m_1 paa Kurven M_1, almindeligere ethvert Punkt indenfor en Cirkel med Centrum i m_1 og Radius e_2; heraf følger specielt, at intet Punkt m_1 paa Kurven M_1 kan være Begrændsningspunkt for Punktmængden $M_1 + M_2$.

Efter den forudgaaende Undersøgelse kan vi nu uden Vanskelighed bevise følgende

Sætning: Lad M_1 og M_2 være to konvekse Kurver, som begge indeholder Begyndelsespunktet O som indre Punkt, og saaledes at Arealet af $M_1 \geqq$ Arealet af M_2. Da vil Punktmængden $M_1 + M_2$ enten være et Omraade (incl. Rand) begrændset af en enkelt konveks Kurve Y_2, og saaledes at Kurven M_1 ligger helt indenfor Kurven Y_2, eller ogsaa vil $M_1 + M_2$ være et Omraade (incl. Rand) begrændset af to konvekse Kurver Y_2 og I_2, hvor I_2 er beliggende helt indenfor Y_2, og saaledes at Kurven M_1 er helt indeholdt i det Indre af Kurven Y_2, men indeholder Kurven I_2 helt i sit Indre. Endvidere vil, idet ς_i $(i = 1, 2)$ henholdsvis e_i $(i = 1, 2)$ betegner Maximum henholdsvis Minimum af Afstanden $\overline{Om_i}$, hvor m_i gennemløber Kurven M_i, Kurven Y_2 være helt indeholdt i en Cirkel (incl. Rand) med O som Centrum og Radius $\varsigma_1 + \varsigma_2$ samt helt i sit Indre (incl. Rand) indeholde en Cirkel med O som Centrum og Radius $e_1 + e_2$, ligesom Kurven I_2, i det Tilfælde, hvor $M_1 + M_2$ er begrændset af to konvekse Kurver, vil være helt indeholdt i en Cirkel (incl. Rand) med Centrum i O og Radius $\varsigma_1 - e_2$. Endelig vil Arealet af det mellem M_1 og Y_2 beliggende Omraade være $>$ Arealet af M_2, ligesom, i det Tilfælde, hvor $M_1 + M_2$ er begrænset af to konvekse Kurver, Arealet af det mellem M_1 og I_2 beliggende Omraade vil være $>$ Arealet af M_2; følgelig vil, i det Tilfælde, hvor $M_1 + M_2$ er begrændset af en enkelt konveks Kurve, Arealet af Omraadet $M_1 + M_2$ være $>$ Arealet af M_1 + Arealet af M_2, medens, i det Tilfælde, hvor $M_1 + M_2$ er begrændset af to konvekse Kurver, Arealet af Omraadet $M_1 + M_2$ vil være $> 2 \cdot$ Arealet af M_2.

Bevis: 1) Lad os antage, at enhver ret Linie, der overhovedet har Punkter fælles med $M_1 + M_2$, skærer $M_1 + M_2$ i et enkelt Liniestykke (incl. Endepunkter) specielt i et enkelt Punkt; i dette Tilfælde vil $M_1 + M_2$ være et konvekst Omraade; da $M_1 + M_2$ endvidere er helt i det Endelige beliggende og ikke ligger helt paa en ret Linie samt er afsluttet, vil $M_1 + M_2$ i dette Tilfælde bestaa af det Indre (incl. Rand) af en lukket konveks Kurve Y_2. Da endelig ethvert Punkt m_1 paa M_1 tilhører $M_1 + M_2$ uden at være Begrændsningspunkt for $M_1 + M_2$, maa M_1 være beliggende helt indenfor Y_2.

2) Lad os antage, at der findes en ret Linie, der skærer $M_1 + M_2$ i to adskilte Liniestykker. Jeg vil da først søge at bestemme den Punktmængde P, der til Elementer har dels alle Punkter indenfor Kurven M_1 og dels alle saadanne Punkter udenfor eller paa Kurven M_1, som tilhører Punktmængden $M_1 + M_2$ (med andre Ord, Punktmængden P fremkommer ved til Punktmængden $M_1 + M_2$ at føje de Punkter, der ligger

indenfor Kurven M_1 uden at tilhøre Punktmængden $M_1 + M_2$). Lad L være en vilkaarlig ret Linie; jeg vil da vise, at, hvis L overhovedet har Punkter fælles med Punktmængden P, danner disse Punkter et Liniestykke (Endepunkterne medregnede), specielt et enkelt Punkt. Dette indses saaledes: Hvis L ingen Punkter har fælles med $M_1 + M_2$, har L heller ingen Punkter fælles med P; thi i modsat Fald vilde L indeholde et Punkt indenfor Kurven M_1, følgelig ogsaa et Punkt paa Kurven M_1, altsaa et Punkt tilhørende $M_1 + M_2$, i Modstrid med vor Antagelse. Antages dernæst, at L skærer $M_1 + M_2$ i et enkelt Liniestykke AB (Endepunkterne medregnede) specielt i et enkelt Punkt A, vil de for L og P fælles Punkter øjensynlig være de samme, som de for L og $M_1 + M_2$ fælles Punkter; thi i modsat Fald vilde L indeholde et Punkt l udenfor Liniestykket AB, f. Ex. i AB's Forlængelse ud over A, der var beliggende indenfor Kurven M_1; men da maatte L indeholde et Punkt i Forlængelsen af Liniestykket BAl udover l, som laa paa Kurven M_1 og altsaa tilhørte Punktmængden $M_1 + M_2$, i Modstrid med vor Antagelse. Lad os endelig betragte det Tilfælde, hvor L skærer $M_1 + M_2$ i to adskilte Liniestykker $A_1 B_1$ og $A_2 B_2$ (Betegnelserne tænkes valgte saaledes, at Punkterne B_1 og A_2 ligger imellem Punkterne A_1 og B_2). Idet Linien L skærer M_1 i to og kun to Punkter l_1 og l_2, hvoraf l_1 tilhører Liniestykket $A_1 B_1$ og l_2 tilhører Liniestykket $A_2 B_2$, vil ethvert Punkt paa Linien L beliggende mellem B_1 og A_2 tilhøre det Indre af Kurven M_1, medens ethvert Punkt paa Linien L beliggende enten i Forlængelsen af $A_1 B_1$ udover A_1 eller i Forlængelsen af $A_2 B_2$ udover B_2 vil være beliggende udenfor Kurven M_1. Følgelig vil de for L og P fælles Punkter være samtlige Punkter paa Liniestykket $A_1 B_2$ (Endepunkterne medregnede). Hermed er Paastanden om, at enhver ret Linie, hvis den overhovedet har Punkter fælles med P, skærer P i et Liniestykke (Endepunkterne medregnede) specielt i et enkelt Punkt, bevist. Da P endvidere øjensynlig er helt i det Endelige beliggende og ikke ligger helt paa en ret Linie samt er afsluttet, vil P være det Indre (incl. Rand) af en konveks Kurve Y_2, der øjensynlig vil indeholde Kurven M_1 helt i sit Indre. For at bestemme Punktmængden M_1+M_2 har vi nu kun tilbage at bestemme den Punktmængde Q, der bestaar af alle de indenfor M_1 beliggende Punkter, som ikke tilhører Punktmængden M_1+M_2. Er Q først bestemt, faar vi umiddelbart M_1+M_2 ved blot at fradrage P de Punkter, der tilhører Q. Lad L være en vilkaarlig ret Linie; da vil L, hvis den overhovedet har Punkter fælles med Q, øjensynlig skære Q i et Liniestykke (Endepunkterne ikke medregnede); thi af den umiddelbart foregaaende Undersøgelse følger, at L, hvis den ikke skærer Punktmængden M_1+M_2, eller hvis den skærer denne Punktmængde i et Liniestykke, specielt i et enkelt Punkt, intet Punkt vil have fælles med Q, medens L, hvis den skærer M_1+M_2 i to adskilte Liniestykker A_1B_1 og A_2B_2 (hvor Betegnelserne som ovenfor tænkes valgte saaledes, at B_1 og A_2 ligger mellem A_1 og B_2) vil skære Q i Liniestykket B_1A_2 (Endepunkterne ikke medregnede). Q er følgelig et helt i det Endelige beliggende konvekst Omraade. Idet M_1+M_2 er en afsluttet Punktmængde, kan Q endvidere ikke indeholde noget Punkt af sin Begrændsning, altsaa specielt ikke være beliggende helt paa en ret Linie. Punktmængden Q er følgelig det Indre (excl. Rand) af en lukket konveks Kurve I_2. Da endelig intet Punkt paa Kurven M_1 er Begrændsningspunkt for Punktmængden M_1+M_2, maa I_2 være beliggende helt indenfor M_1. Punktmængden M_1+M_2 er følgelig i dette Tilfælde et Omraade (incl. Rand) begrændset af to lukkede konvekse Kurver Y_2 og I_2, hvor Y_2 indeholder M_1 helt i sit Indre, medens M_1 indeholder I_2 helt i sit Indre. Hermed er den første Del af den opstillede Sætning bevist.

Idet ethvert Punkt tilhørende M_1+M_2 har Formen m_1+m_2, indses umiddelbart, at „den ydre Begrændsningskurve“ Y_2 maa være helt beliggende indenfor en Cirkel (incl. Rand) med Centrum i Begyndelsespunktet O og Radius $\varsigma_1+\varsigma_2$. Idet endvidere ethvert Punkt, hvis Afstand fra et vilkaarligt Punkt m_1 paa M_1 er mindre end e_2, tilhører Punktmængden M_1+M_2, indser man, at Kurven Y_2 helt i sit Indre (incl. Rand) maa indeholde en Cirkel med Centrum i O og Radius e_1+e_2; thi, idet O er beliggende indenfor M_1, vil enhver Halvlinie L ud fra O skære enhver af Kurverne M_1 og Y_2 i ét og kun ét Punkt m_1 og y_2, og her vil Afstanden $\overline{Om_1}$ være $\geqq e_1$, Afstanden $\overline{m_1y_2}$ være $\geqq e_2$, altsaa Afstanden $\overline{Oy_2}$ være $\geqq e_1+e_2$. Endelig vil i det Tilfælde, hvor M_1+M_2 er begrændset af to konvekse Kurver, Kurven I_2 (idet c betegner et vilkaarligt Punkt i Planen og ς betegner Maximum af Afstanden $\overline{cm_1}$ for m_1 gennemløbende M_1) være helt indeholdt i en Cirkel C (incl. Rand) med Centrum i c og Radius $\varsigma-e_2$; thi lad L være en vilkaarlig Halvlinie ud fra c; hvis da L intet Punkt har fælles med M_1, vil L heller intet Punkt have fælles med I_2; hvis derimod L har mindst ét Punkt fælles med M_1, og hvis jeg med m_1 betegner det af de for L og M_1 fælles Punkter, hvis Afstand fra c er størst, vil øjensynlig intet Punkt paa Halvlinien L, hvis Afstand fra c er større end Afstanden $\overline{cm_1}$, ligge paa Kurven I_2, almindeligere, intet Punkt paa L, hvis Afstand fra c er større end det største af Tallene $\overline{cm_1}-e_2$ og 0, altsaa i hvert Fald intet Punkt paa L, hvis Afstand fra c er større end $\varsigma-e_2$; hermed er bevist, at Kurven I_2 vil ligge helt indenfor Cirklen C (incl. Rand); vælges specielt Punktet c i Begyndelsespunktet følger, at I_2 vil ligge indenfor en Cirkel (incl. Rand) med Centrum i O og Radius ς_1-e_2. [Det kan i denne Sammenhæng bemærkes, at Punktet O ikke nødvendigvis er beliggende indenfor (eller paa) Kurven I_2.]

Jeg skal nu gaa over til en Behandling af de i Sætningens sidste Del fremsatte Paastande, nemlig at Arealet af det mellem M_1 og Y_2 beliggende Omraade er $>$ Arealet af M_2, samt at i det Tilfælde, hvor M_1+M_2 er begrændset af to konvekse Kurver, Arealet af det mellem M_1 og I_2 beliggende Omraade er $>$ Arealet af M_2. Jeg skal her nøjes med at bevise den sidste af disse to Sætninger; Beviset for den første føres paa ganske tilsvarende Maade. Lad l være et Punkt i det Indre af Kurven I_2. Da vil Kurven $N(l)$ ingen Punkter have fælles med M_1. Idet Punktet l imidlertid er beliggende indenfor begge Kurverne $N(l)$ og M_1, kan $N(l)$ ikke ligge helt udenfor M_1; idet endvidere Arealet af $N(l)$ = Arealet af $M_2 \leqq$ Arealet af M_1, kan $N(l)$ heller ikke helt omslutte M_1; følgelig maa $N(l)$ ligge helt indenfor M_1. [Heraf følger specielt, at Arealet af $N(l)$ maa være $<$ (ikke blot $\leqq$) Arealet af M_1; altsaa er bevist, at hvis Arealet af M_1 = Arealet af M_2, maa Punktmængden $M_1 + M_2$ nødvendigvis være begrændset af kun én konveks Kurve.]

Lad os ud fra det betragtede Punkt l trække en Halvlinie L; idet l er beliggende indenfor enhver af de tre konvekse Kurver M_1, I_2 og $N(l)$, skærer L enhver af disse Kurver i ét og kun ét Punkt; lad os betegne disse Punkter med henholdsvis m_1, i_2 og n, og lad os betegne Afstandene $\overline{lm_1}$, $\overline{li_2}$ og $\overline{ln}$ henholdsvis med r_1, r_2 og r_3. Da er for det første $r_1 > r_2$ og $r_1 > r_3$. Jeg vil imidlertid bevise, at der gælder den skarpere Ulighed $r_1 \geqq r_2 + r_3$. Dette indses saaledes: Lad l' betegne det Punkt paa Halvlinien L, hvis Afstand fra l er lig $r_1 - r_3$; Punktet l' hører da med til Punktmængden $M_1 + M_2$, da Kurven $N(l')$ øjensynlig indeholder Punktet m_1, altsaa har et Punkt fælles med M_1; følgelig ligger l' udenfor eller paa Kurven I_2; altsaa er $r_2 \leqq r_1 - r_3$, d. v. s. $r_1 \geqq r_2 + r_3$, q. e. d. Dette gælder for enhver Stilling af Halvlinien L ud fra l. Lad X være en fast Halvlinie ud fra l, og lad os vælge en positiv Omløbsretning i Planen, samt bestemme Halvlinien L ved Vinklen $\varphi = \sphericalangle (XL)$ $(0 \leqq \varphi < 2\pi)$. Da er r_1, r_2 og r_3 Funktioner af φ, og der gælder for alle φ Uligheden $r_1 \geqq r_2 + r_3$. Nu er imidlertid

$$\text{Arealet af } M_1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r_1^2 d\varphi\,; \quad \text{Arealet af } I_2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r_2^2 d\varphi,$$

samt Arealet af M_2 = Arealet af $N(l) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r_3^2 d\varphi$.

Følgelig er Arealet af det mellem M_1 og I_2 beliggende Omraade lig

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(r_1^2 - r_2^2)\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(r_1+r_2)(r_1-r_2)\, d\varphi > \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(r_1-r_2)^2 d\varphi \geqq \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r_3^2\, d\varphi =$$

= Arealet af M_2, q. e. d.

Hermed er den opstillede Sætning fuldstændig bevist.

Jeg bemærker sluttelig, at, som det umiddelbart fremgaar af Beviset, den ovenstaaende Sætning [alene med Undtagelse af den ene Bemærkning om, at Y_2 helt i sit Indre (incl. Rand) vil indeholde en Cirkel med Centrum i O og Radius $e_1 + e_2$] vil bevare sin Gyldighed uforandret, hvis i denne Sætning Forudsætningen om, at O er beliggende indenfor Kurven M_1, udelades Denne Bemærkning vil vi faa Brug for i det følgende.

§ 3. Addition af uendelig mange konvekse Kurver.

Lad $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ være uendelig mange konvekse Kurver saaledes, at $\sum_1^{\infty} M_n$ er konvergent. Jeg skal da i denne Paragraf undersøge Punktmængden $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$. Som tidligere vist kan vi uden at indskrænke Undersøgelsens Almindelighed antage, at Begyndelsespunktet O er beliggende indenfor enhver af Kurverne M_n; da er $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ tillige ubetinget konvergent, d. v. s. den uendelige Række med positive Tal $\sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_n$, hvor ς_n betegner Maximum af Afstanden $\overline{Om_n}$, idet m_n gennemløber Kurven M_n, er konvergent; lad denne Række have Summen R; da vil alle Punkter tilhørende Punktmængden $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ (ligesom for ethvert N, alle Punkter tilhørende $\sum_{n=1}^{N} M_n$) være beliggende indenfor en Cirkel (incl. Rand) med Centrum i O og Radius R. Jeg vil antage, hvad der øjensynlig er tilladeligt, og hvad der vil simplificere Undersøgelsen i væsentlig Grad, at Arealet af M_1 er $\geqq$ Arealet af enhver af Kurverne M_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Inden jeg gaar over til den direkte Undersøgelse af Punktmængden $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$, vil jeg først bevise følgende Sætning om Addition af et vilkaarligt endeligt Antal konvekse Kurver:

Punktmængden $\sum_{n=1}^{N} M_n$ $(N = 2, 3, \ldots)$ er et Omraade (incl. Rand) begrændset enten af en enkelt konveks Kurve Y_N (og dette Tilfælde vil (for $N \geqq 3$) altid indtræffe, hvis Punktmængden $\sum_{n=1}^{N-1} M_n$ er begrændset af en enkelt konveks Kurve) eller af to konvekse Kurver Y_N og I_N, hvor I_N er beliggende helt indenfor Y_N. Idet vi sætter $Y_1 = I_1 = M_1$, vil i begge Tilfælde Kurven Y_N $(N \geqq 2)$ helt omslutte Kurven Y_{N-1}, ligesom i det Tilfælde, hvor $\sum_{n=1}^{N} M_n$ er begrændset af de to Kurver Y_N og I_N, Kurven I_N vil være helt beliggende indenfor Kurven I_{N-1}. Endvidere vil, idet ς_n og e_n betegner Maksimum henholdsvis Minimum af Afstanden $\overline{Om_n}$ for m_n gennemløbende Kurven M_n, Kurven Y_N være beliggende indenfor en Cirkel (incl. Rand) med Centrum i O og Radius $\sum_{n=1}^{N} \varsigma_n$, og helt i sit Indre (incl. Rand) indeholde en Cirkel med Centrum i O og Radius $\sum_{n=1}^{N} e_n$, ligesom, i det Tilfælde, hvor $\sum_{n=1}^{N} M_n$ er begrændset af to konvekse Kurver, Kurven I_N vil være helt indeholdt i en Cirkel (incl. Rand) med Centrum i O og Radius $\varsigma_1 - \sum_{n=2}^{N} e_n$. [Heraf følger specielt, at hvis $\varsigma_1 \leqq \sum_{n=2}^{N} e_n$, vil Punktmængden $\sum_{n=1}^{N} M_n$ nødvendigvis være begrændset af kun én konveks Kurve.]

Endelig vil Arealet af det mellem Y_N og Y_{N-1} beliggende Omraade, ligesom ogsaa, i det Tilfælde, hvor $\sum_{n=1}^{N} M_n$ er begrændset af to konvekse Kurver, Arealet af det mellem I_N og I_{N-1} beliggende Omraade være $>$ Arealet af Kurven M_N. [Heraf følger specielt, at hvis Arealet af M_1 er $\leqq \sum_{n=2}^{N}$ (Arealet af M_n), vil Punktmængden $\sum_{n=1}^{N} M_n$ nødvendigvis være begrændset af kun én konveks Kurve.]

Beviset for denne Sætning føres let gennem Induktion; Sætningen er rigtig for $N = 2$. Vi antager da Sætningen rigtig, naar Antallet af konvekse Kurver er $\leqq N$, og vil da herudfra bevise dens Rigtighed, naar Antallet af konvekse Kurver er $N + 1$.

Lad $N'(l)$ betegne den konvekse Kurve, der fremkommer af M_{N+1} paa ganske samme Maade som den i forrige Paragraf betragtede Kurve $N(l)$ fremkom af M_2. [$N'(l)$ er altsaa den konvekse Kurve, der fremkommer ved at parallelforskyde Kurven $\div M_{N+1}$ saaledes, at O falder i det vilkaarligt givne Punkt l.] Da er det en nødvendig og tilstrækkelig Betingelse for at l tilhører Punktmængden $\sum_{n=1}^{N+1} M_n$, at Kurven $N'(l)$ har Punkter fælles med Punktmængden $\sum_{n=1}^{N} M_n$. Jeg vil nu først bevise, at Punktmængden $\sum_{n=1}^{N+1} M_n$ indeholder ethvert Punkt, der tilhører Punktmængden $\sum_{n=1}^{N} M_n$. Dette indses umiddelbart saaledes: Lad l være et vilkaarligt Punkt i Punktmængden $\sum_{n=1}^{N} M_n$; hvis l da ikke tilhørte Punktmængden $\sum_{n=1}^{N+1} M_n$, vilde $N'(l)$ ingen Punkter have fælles med $\sum_{n=1}^{N} M_n$. Idet Punktet l imidlertid ligger indenfor $N'(l)$ og indenfor eller paa Kurven Y_N, kan $N'(l)$ ikke ligge helt udenfor Y_n; endvidere kan $N'(l)$, i det Tilfælde, hvor $\sum_{n=1}^{N} M_n$ begrændses af de to lukkede Kurver Y_N og I_N, heller ikke ligge helt indenfor I_N, da Punktet l ligger indenfor $N'(l)$ men udenfor eller paa Kurven I_N; følgelig maatte $N'(l)$, hvis den ingen Punkter havde fælles med $\sum_{n=1}^{N} M_n$, helt omslutte Kurven Y_N, men dette er umuligt, da Arealet af $Y_N >$ Arealet af $M_1 \geqq$ Arealet af $M_{N+1} =$ Arealet af $N'(l)$. Hermed er bevist, at ethvert Punkt l tilhørende Punktmængden $\sum_{n=1}^{N} M_n$ ogsaa maa tilhøre Punktmængden $\sum_{n=1}^{N+1} M_n$.

Jeg vender mig nu til en Betragtning af de udenfor Y_n beliggende Punkter. Lad os først betragte den Punktmængde $Y_N + M_{N+1}$, der fremkommer ved Addition af de to konvekse Kurver Y_N og M_{N+1}, der begge indeholder Punktet O som indre Punkt. Da Arealet af $Y_N >$ Arealet af M_{N+1}, vil der, hvad enten Punktmængden $Y_N + M_{N+1}$ er begrændset af én eller af to konvekse Kurver, eksistere en saadan konveks Kurve Y_{N+1}, helt indeholdende Y_N i sit Indre, at de udenfor Y_N beliggende Punkter af Punktmængden $Y_N + M_{N+1}$ er de og kun de udenfor Y_N beliggende Punkter, der ligger indenfor eller paa Kurven Y_{N+1}. Idet Punktmængden $Y_N + M_{N+1}$ imidlertid er helt indeholdt i Punktmængden $\sum_{n=1}^{N+1} M_n$ (da Y_N er indeholdt i $\sum_{n=1}^{N} M_n$), vil $\sum_{n=1}^{N+1} M_n$ følgelig indeholde ethvert udenfor Y_N beliggende Punkt, der ligger indenfor eller paa Kurven Y_{N+1}. Derimod paastaar jeg, vil $\sum_{n=1}^{N+1} M_n$ ikke indeholde noget Punkt l udenfor Y_{N+1}; thi i modsat Fald vilde Kurven $N'(l)$ have Punkter fælles med $\sum_{n=1}^{N} M_n$, følgelig, da $\sum_{n=1}^{N} M_n$ er beliggende indenfor eller paa Kurven Y_N, ogsaa med Kurven Y_N, d. v. s. l maatte tilhøre Punktmængden $Y_N + M_{N+1}$, hvad der ikke er Tilfældet.

Hermed er bevist Eksistensen af en lukket konveks Kurve Y_{N+1}, der helt omslutter Y_N, saaledes at alle de udenfor Y_N beliggende Punkter af $\sum_{n=1}^{N+1} M_n$ er samtlige de udenfor Y_n beliggende Punkter, der ligger indenfor eller paa Kurven Y_{N+1}. Da Y_{N+1} er bestemt som „den ydre Grændsekurve“ for $Y_N + M_{N+1}$, vil endvidere det mellem Kurverne Y_N og Y_{N+1} beliggende Areal være $>$ Arealet af M_{N+1}. Tillige vil, idet Maximum af Afstanden $\overline{Oy_N}$ for y_N gennemløbende Y_N er $\leqq \sum_{n=1}^{N} \varsigma_n$, og Minimum af Afstanden $\overline{Oy_N}$ for y_N gennemløbende Y_N er $\geqq \sum_{n=1}^{N} e_n$, Kurven Y_{N+1} være helt indeholdt i en Cirkel (incl. Rand) med Centrum i O og Radius $\sum_{n=1}^{N+1} \varsigma_n$ samt helt i sit Indre (incl. Rand) indeholde en Cirkel med Centrum i O og Radius $\sum_{n=1}^{N+1} e_n$.

For at bestemme Punktmængden $\sum_{n=1}^{N+1} M_n$ har vi nu kun tilbage, i det Tilfælde, hvor $\sum_{n=1}^{N} M_n$ er begrændset af de to Kurver Y_N og I_N, at undersøge, hvilke Punkter indenfor I_N der tilhører $\sum_{n=1}^{N+1} M_n$. Hvis Arealet af I_N er $<$ Arealet af M_{N+1}, vil ethvert Punkt l indenfor I_N tilhøre $\sum_{n=1}^{N+1} M_n$; thi da $N'(l)$ i dette Tilfælde øjensynlig hverken kan være beliggende helt udenfor Y_N, eller helt indenfor I_N, eller helt omslutte Y_N, maa $N'(l)$ nødvendigvis have Punkter fælles med $\sum_{n=1}^{N} M_n$. Lad os dernæst antage, at Arealet af I_N er $\geqq$ Arealet af M_{N+1}. Jeg betragter da den Punktmængde $I_N + M_{N+1}$, der fremkommer ved Addition af de to konvekse Kurver I_N og M_{N+1}, af hvilke i hvert Fald M_{N+1} indeholder Begyndelsespunktet O i sit Indre. Hvis denne Punktmængde $I_N + M_{N+1}$ er begrændset af kun én konveks Kurve Y', vil, da I_N er beliggende helt indenfor Y', alle Punkter indenfor I_N tilhøre Punktmængden $I_N + M_{N+1}$, altsaa yderligere tilhøre Punktmængden $\sum_{n=1}^{N+1} M_n$. Er Punktmængden $I_N + M_{N+1}$ derimod begrændset af de to konvekse Kurver Y' og I_{N+1} (helt indenfor Y'), vil alle Punkter indenfor I_N men udenfor eller paa Kurven I_{N+1} tilhøre $I_N + M_{N+1}$, altsaa yderligere tilhøre $\sum_{n=1}^{N+1} M_N$; derimod vil intet Punkt l indenfor I_{N+1} tilhøre $\sum_{n=1}^{N+1} M_n$, thi i modsat Fald maatte Kurven $N'(l)$ indeholde Punkter af $\sum_{n=1}^{N} M_n$, følgelig, da $\sum_{n=1}^{N} M_n$ ligger helt udenfor eller paa Kurven I_N, ogsaa Punkter paa I_N, d. v. s. l maatte tilhøre Punktmængden $I_N + M_{N+1}$, i Modstrid med at l ligger indenfor Kurven I_{N+1}. Idet I_{N+1} er bestemt som „den indre Begrændsningskurve" for $I_N + M_{N+1}$, følger endvidere, at Arealet af det mellem I_N og I_{N+1} beliggende Omraade er $>$ Arealet af M_{N+1}; samt, idet Maksimum af Afstanden $\overline{Oi_N}$, for i_N gennemløbende I_N, er $\leqq \varsigma_1 - \sum_{n=2}^{N} e_n$, at Kurven I_{N+1} er helt indeholdt i en Cirkel (incl. Rand) med Centrum i O og Radius $\varsigma_1 - \sum_{n=2}^{N+1} e_n$.

Hermed er den ovenstaaende Sætning fuldstændig bevist.

Jeg gaar nu over til den direkte Undersøgelse af Punktmængden $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$. Som tidligere bevist er denne Punktmængde identisk med den tilsvarende Punktmængde M^*, hvis Elementer m^* er karakteriserede gennem følgende Egenskab: svarende til et vilkaarligt Tal $\varepsilon > 0$ eksisterer der et helt Tal $N_1 = N_1(\varepsilon)$, saaledes at enhver af Punktmængderne $\sum_{n=1}^{N} M_n$ $(N \geqq N_1)$ indeholder mindst ét Punkt, hvis Afstand fra m^* er mindre end ε. Idet Punktmængden $\sum_{n=1}^{N} M_n$ er helt indeholdt i Punktmængden $\sum_{n=1}^{N+1} M_n$, indses umiddelbart, at ethvert Punkt tilhørende en af Punktmængderne $\sum_{n=1}^{N} M_n$ maa tilhøre Punktmængden M^*, altsaa tilhøre Punktmængden M.

Sammen med Punktmængden $\sum_{n=1}^{N} M_n$ vil jeg betragte den Punktmængde P_N, der bestaar af samtlige Punkter indenfor og paa den konvekse Kurve Y_N (med andre Ord, hvis $\sum_{n=1}^{N} M_n$ er begrændset af kun én konveks Kurve, er P_n identisk med $\sum_{n=1}^{N} M_n$; hvis $\sum_{n=1}^{N} M_n$ derimod er begrændset af to konvekse

Kurver, er P_N den Punktmængde, der fremkommer ved til $\sum_{n=1}^{N} M_n$ at føje alle de indenfor M_1 beliggende Punkter, der ikke tilhører $\sum_{n=1}^{N} M_n$). Da er P_N et konvekst Omraade. Lad P betegne den Punktmængde, hvis Elementer p er karakteriserede derigennem, at der til ethvert $\varepsilon > 0$ svarer et helt Tal N_1, saaledes at enhver af Punktmængderne P_N $(N \geqq N_1)$ indeholder et Punkt, hvis Afstand fra p er mindre end ε. Da vil et Punkt udenfor M_1 øjensynlig da og kun da tilhøre $M = M^*$, naar det tilhører P. Jeg vil bevise, at P er et konvekst Omraade; dette indses umiddelbart saaledes: Hvis den rette Linie L har de to Punkter A og B fælles med P, vil, for alle tilstrækkelig store N, Punktmængden P_N indeholde to Punkter A_N og B_N saaledes, at Afstandene $\overline{AA_N}$ og $\overline{BB_N}$ begge er mindre end ε; idet P_N imidlertid er et konvekst Omraade, vil P_N indeholde alle Punkter paa Liniestykket $A_N B_N$; lad C være et vilkaarligt Punkt paa L mellem A og B; der vil da findes et Punkt C_N paa Liniestykket $A_N B_N$ (altsaa et Punkt C_N tilhørende P_N) saaledes, at Afstanden $\overline{CC_N}$ er mindre end ε; heraf følger imidlertid, at C tilhører Punktmængden P. Hermed er bevist, at Punktmængden P, hvis den indeholder de to Punkter A og B, indeholder hele Liniestykket AB, d. v. s. at P er et konvekst Omraade. Da P endvidere er afsluttet og helt i det Endelige beliggende samt ikke ligger helt paa en ret Linie, maa P være et Omraade (incl. Rand) begrændset af en konveks Kurve Y; og det er klart, at enhver af Kurverne Y_N maa ligge helt indenfor Kurven Y. Alle de udenfor M_1 beliggende Punkter, som tilhører Punktmængden $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$, er altsaa alle de udenfor M_1 beliggende Punkter, der ligger indenfor eller paa en konveks Kurve Y, der helt omslutter M_1. Idet Y helt omslutter Y_N $(N = 1, 2, \ldots)$ vil endvidere det mellem M_1 og Y beliggende Areal være $> \sum_{n=2}^{N}$ (Arealet af M_n), altsaa $\geqq \sum_{n=2}^{\infty}$ (Arealet af M_n). [At denne sidste uendelige Række er konvergent, følger af Udledelsen, men er trivielt, da Arealet af $M_n \leq \pi \varsigma_n^2$, og $\sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_n^2$ umiddelbart ses at være konvergent, da $\sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_n$ er konvergent.] Iøvrigt vil det mellem M_1 og Y beliggende Areal være $\geq$ det mellem M_1 og Y_2 beliggende Areal $+ \sum_{n=3}^{\infty}$ (Arealet af M_n), altsaa $>$ (ikke blot $\geq$) $\sum_{n=2}^{\infty}$ (Arealet af M_n). Endelig indses, at Kurven Y vil være beliggende indenfor en Cirkel (incl. Rand) med Centrum i O og Radius $\sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_n$ samt i sit Indre (incl. Rand) vil indeholde en Cirkel med Centrum i O og Radius $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$.

For helt at bestemme Punktmængden $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$, har vi endnu tilbage, i det Tilfælde, hvor samtlige Punktmængder $\sum_{n=1}^{N} M_n$ $(N = 2, 3, \ldots)$ er begrændsede af to konvekse Kurver Y_N og I_N, at bestemme de Punkter indenfor M_1, der tilhører Punktmængden M. Ved en Betragtning ganske tilsvarende til den ovenfor benyttede beviser man her, at hvis der overhovedet findes Punkter indenfor M_1, der ikke tilhører M, vil den af disse Punkter dannede Punktmængde Q være et konvekst Omraade, der ikke indeholder noget Punkt af sin Begrændsning (altsaa specielt ikke er helt beliggende paa en ret Linie), og som ligger helt indenfor enhver af Kurverne I_N. Følgelig vil der, hvis M ikke indeholder alle Punkter indenfor Kurven M_1, eksistere en saadan konveks Kurve I, at de indenfor M_1, til M hørende, Punkter er samtlige de indenfor M_1 beliggende Punkter, der ligger udenfor eller paa Kurven I. Endvidere vises paa ganske samme Maade som ovenfor, at det mellem M_1 og I beliggende Areal er $> \sum_{n=2}^{\infty}$ (Arealet af M_n), samt at Kurven I er helt beliggende indenfor en Cirkel (incl. Rand) med Centrum i O og Radius $\varsigma_1 - \sum_{n=2}^{\infty} e_n$.

Resumerer vi de fundne Resultater, har vi bevist følgende

Sætning: Lad M_n $(n = 1, 2, \ldots)$ være en lukket konveks Kurve, der indeholder Begyndelsespunktet O i sit Indre, og saaledes, at $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ er konvergent; og lad Arealet af M_1 være $\geqq$ Arealet af M_n $(n = 2, 3, \ldots)$. Punktmængden $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ vil da være et Omraade (incl. Rand) begrændset enten af en enkelt lukket konveks Kurve Y eller af to lukkede konvekse Kurver Y og I, hvor I ligger helt indenfor Y. Endvidere vil, idet ς_n henholdsvis e_n betegner Maksimum henholdsvis Minimum af Afstanden $\overline{Om_n}$ for m_n gennemløbende M_n, Kurven Y ligge indenfor en Cirkel (incl. Rand) med Centrum i O og Radius $\sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_n$, samt i sit Indre (incl. Rand) indeholde en Cirkel med Centrum i O og Radius $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$, ligesom Kurven I, i det Tilfælde, hvor M begrændses af de to Kurver Y og I, vil være beliggende indenfor en Cirkel (incl. Rand) med O som Centrum og Radius $\varsigma_1 - \sum_{n=2}^{\infty} e_n$. Endelig vil Kurven Y helt omslutte Kurven M_1 og Arealet af det mellem M_1 og Y beliggende Omraade vil være $>$ $\sum_{n=2}^{\infty}$ (Arealet af M_n), ligesom Kurven I, i det Tilfælde, hvor M er begrændset af de to Kurver Y og I, vil være beliggende helt indenfor Kurven M_1 og saaledes, at Arealet af det mellem M_1 og I beliggende Omraade vil være $> \sum_{n=2}^{\infty}$ (Arealet af M_n). Følgelig vil, hvis M er begrændset af kun den ene Kurve Y, Arealet af Omraadet M være $> \sum_{n=1}^{\infty}$ (Arealet af M_n), medens Arealet af Omraadet M i det Tilfælde, hvor M er begrændset af de to lukkede konvekse Kurver

Y og I, vil være $> 2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty}$ (Arealet af M_n). [Af Sætningen fremgaar specielt, at hvis $\varsigma_1 \leqq \sum_{n=2}^{\infty} e_n$, eller hvis Arealet af M_1 er $\leqq \sum_{n=2}^{\infty}$ (Arealet af M_n), vil M nødvendigvis være begrændset af kun én lukket konveks Kurve].

København, 11—2—1912.

SUR L'ADDITION D'UN NOMBRE INFINI DE COURBES CONVEXES.

RÉSUMÉ.

Introduction.

Au cours de recherches relatives à une classe générale de séries infinies[1] j'ai été amené à me poser le problème suivant:

Étant donnée une suite infinie de nombres positifs $\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_n, \ldots$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_n$ soit convergente, quelles seront les valeurs prises par la fonction $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_n e^{i\varphi_n}$ si nous supposons que les nombres réels $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ parcourent indépendamment les uns des autres toutes les valeurs depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ ou bien, ce qui revient évidemment au même, toutes les valeurs comprises entre 0 (inclusivement) et 2π (exclusivement)?

Il est très facile de démontrer que le théorème suivant aura lieu:

1° Au cas où la suite de nombres $\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_n, \ldots$ ne comprend pas un élément, ς_n, supérieur à la somme de tous les autres, la fonction F prendra toutes les valeurs z pour lesquelles $|z| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_n$, et ces valeurs seulement; en d'autres termes: elle prendra toutes les valeurs complexes dont la représentation dans le plan complexe soit située à l'intérieur ou sur la circonférence d'un cercle ayant l'origine pour centre et de rayon $\sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_n$.

2° Dans le cas où la suite $\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_n, \ldots$ comprend au contraire un élément ς_N supérieur à la somme de tous les autres, la fonction F prendra toutes les valeurs z pour lesquelles

[1] Voir mon mémoire intitulé: *Lösung des absoluten Konvergenzproblems einer allgemeinen Klasse Dirichletschen Reihen*, qui va paraître dans les Acta Mathematica.

$\varsigma_N - \sum_{n \neq N} \varsigma_n \leq |z| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_n$, et ces valeurs seulement; en d'autres termes: elle prendra toutes les valeurs complexes dont la représentation dans le plan complexe soit située à l'intérieur ou sur le bord d'un anneau circulaire ayant son centre à l'origine et dont les rayons extérieur et intérieur soient respectivement $\sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_n$ et $\varsigma_N - \sum_{n \neq N} \varsigma_n$.

En tenant compte de ce fait que, φ_n variant de 0 à 2π, le point du plan complexe qui correspond au nombre $\varsigma_n e^{i\varphi_n}$ parcourra une circonférence ayant l'origine pour centre et de rayon ς_n, le même théorème peut évidemment, sous une forme un peu moins précise, il est vrai, s'énoncer comme suit: L'ensemble M de points du plan complexe qui s'obtient par l'addition d'une infinité de circonférences ayant pour centre l'origine et dont les rayons forment une série convergente (c'est-à-dire: l'ensemble M de points qui correspond à l'ensemble de tous les nombres complexes $z = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$, où z_n est le nombre complexe qui correspond à un point arbitraire situé sur la $n^{\text{ième}}$ circonférence) formera ou l'intérieur d'un cercle (y compris la circonférence) ayant son centre à l'origine, ou bien celui d'un anneau circulaire (y compris les circonférences intérieure et extérieure) ayant également l'origine pour centre.

L'étude de certaines fonctions auxquelles on a affaire dans la théorie analytique des nombres premiers m'a conduit au problème plus général de savoir quel ensemble de points résulterait d'une addition portant non pas en particulier sur une infinité de circonférences ayant l'origine pour centre, mais sur une infinité de courbes convexes fermées arbitraires. Je démontrais alors une proposition générale, correspondant à celle que je viens d'énoncer sur l'addition d'une infinité de circonférences et qui disait: que l'ensemble de points qu'on obtient dans le plan complexe par l'addition d'une infinité de courbes convexes fermées sera ou l'intérieur (y compris la frontière) d'une courbe convexe fermée, ou bien un domaine (y compris la frontière) limité par deux courbes convexes fermées dont l'une sera intérieure à l'autre.

La présente Note contient la formulation exacte et la démonstration de cette proposition. Comme il s'agit au fond d'un théorème de géométrie il m'a semblé plus naturel de donner la démonstration sous sa forme géométrique que d'exposer le théorème et la démonstration sous leur aspect arithmétique en introduisant des nombres complexes.

Au § 1 je fais quelques remarques générales d'orientation sur l'addition d'une infinité d'ensembles de points; le § 2 traite de l'addition de deux courbes convexes fermées; le § 3, enfin est relatif à l'addition d'une infinité de courbes convexes fermées.

Dans un mémoire subséquent je me propose d'appliquer les résultats de la présente recherche aux fonctions appartenant à la théorie analytique des nombres premiers, et notamment à la fonction zéta de Riemann.

§ 1. Quelques remarques générales sur l'addition d'une infinité d'ensembles de points.

Soient p_1 et p_2 deux points dans un plan d'origine O, et entendons, comme on le fait habituellement, par la somme $p_1 + p_2$, le point du plan qui forme le sommet opposé à O dans la parallélogramme où les deux autres sommets sont p_1 et p_2. Le concept de somme de deux points s'étend immédiatement en celui de somme d'un nombre fini quelconque de points. Soient $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ une suite infinie de points situés dans le plan; la série infinie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ sera alors dite convergente et avec la somme p si le point $q_N = \sum\limits_{n=1}^{N} p_n$ se rapproche du point limite fini et déterminé p, N croissant indéfiniment; c. à d. si $\lim\limits_{N=\infty} q_N = p$.

Soient M_1, aux éléments (points) m_1, et M_2 aux éléments m_2, deux ensembles de points donnés, situés dans le plan; je désigne par la somme $M_1 + M_2$ l'ensemble de points constitué par tous les points de forme $m_1 + m_2$; en d'autres termes: l'ensemble de points $M_1 + M_2$ contient tous les points susceptibles d'être construits comme somme d'un élément de M_1 et d'un élément de M_2, et ces points seulement.

Le concept de somme de deux ensembles de points s'étend immédiatement en celui de somme d'un nombre fini quelconque d'ensembles de points.

Supposons donnée une suite infinie d'ensembles de points: M_1 aux éléments m_1, M_2 aux éléments m_2, $\ldots$, M_n aux éléments $m_n, \ldots$. La série infinie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ sera dite convergente dans les cas où toute série infinie $\sum_{n=1}^{\infty} m_n$ (où m_n désigne un point quelconque de M_n) sera convergente; d'une série $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convergente nous dirons qu'elle représente (a la somme) M, M désignant l'ensemble de points qui aura pour éléments m tous les points de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} m_n$ (chaque point n'étant compté qu'une fois) et ces points seulement.

Suivent des remarques et des théorèmes relatifs à la somme d'une infinité d'ensembles de points. Citons, à titre d'exemple, le théorème suivant: Étant donnée une série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ d'ensembles de points M_n situés tout entiers dans le fini (c.-à-d. à l'intérieur d'un cercle ayant l'origine pour centre et de rayon R_n) et fermés (c.-à-d. contenant ses points limite) l'ensemble de points $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ constituera également un ensemble de points fermé, situé tout entier dans le fini.

Citons en outre le théorème que voici: Étant donnée une suite infinie d'ensembles de points $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ soit convergente; désignons par M^* l'ensemble de points composé de points m^* pour lesquels il soit possible de prendre, dans l'ensemble de points $L_r = \sum_{n=1}^{r} M_n$ un point l_r tel que $\lim_{r=\infty} l_r = m^*$. L'ensemble de points M^* comprendra, comme éléments m^*, tous les points contenus dans l'ensemble de points $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ ou constituant des points limite de l'ensemble M, et ces points seulement. De là résulte spécialement qu'au cas où l'ensemble de points $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ est un ensemble de points fermé — et, à fortiori, si chacun des ensembles de points M_n est fermé et situé tout entier dans le fini, M sera égal à M^*.

Citons enfin le théorème suivant qui nous aidera à comprendre la structure des ensembles de points M_n d'une série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$: Soit M_n $(n = 1, 2, \ldots)$ un ensemble de points situé tout entier dans le fini et soit $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convergente. Il existera une suite de points c_1, c_2, ..., c_n, ... où $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ sera convergente et une suite correspondante de nombres positifs $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ où $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ sera convergente tel que l'ensemble de points M_n $(n = 1, 2, \ldots.)$ sera situé tout entier à l'intérieur du cercle de centre c_n et de rayon r_n.

De ce dernier théorème se déduit immédiatement la remarque importante: Dans l'étude des séries convergentes $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ dont chaque terme soit un ensemble de points situé tout entier dans le fini, on pourra se borner à considérer les séries absolument convergentes (une serie est dite absolument convergente quand le terme général M_n se trouve contenu tout entier dans un cercle ayant l'origine pour centre et de rayon r_n tel que la série à termes positifs, $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ soit convergente), car à toute série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ dont les termes soient tout entiers situés dans le fini correspondra évidemment, en vertu du théorème précédent une série absolument convergente $\sum_{n=1}^{\infty} M_n'$ où l'ensemble de points M_n' sera congruent à l'ensemble de points M_n et tel que l'ensemble de points $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ se déduit immédiatement de l'ensemble de points $M' = \sum_{n=1}^{\infty} M_n'$ à l'aide d'un simple déplacement parallèle.

Le § 1 se termine par la considération du cas spécial où chacun des ensembles de points M_n de la série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ est une courbe de Jordan. On montre aisément, en se basant sur les théorèmes précédents qu'il suffit de considérer le cas où l'origine O se trouve intérieurement à chacune des courbes M_n et, aussi, que dans ce cas $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ sera absolument convergente.

§ 2. Sur l'addition de deux courbes convexes.

Ce paragraphe contient le démonstration du théorème suivant:

Soient M_1 et M_2 deux courbes convexes contenant toutes deux l'origine O comme point intérieur et soit l'aire de M_1 [1] $\geqq$ l'aire de M_2. L'ensemble de points $M_1 + M_2$ sera ou un domaine (y compris la frontière) limité par une seule courbe convexe Y_2 et tel que la courbe M_1 se trouve située tout entière à l'intérieur de la courbe Y_2, ou bien $M_1 + M_2$ représentera un domaine (y compris la frontière) limité par deux courbes convexes Y_2 et I_2 dont I_2 sera situé tout entière à l'intérieur de Y_2 et de telle sorte que la courbe M_1 soit contenue toute entière à l'intérieur de la courbe Y_2 tout en contenant I_2 tout entière à son intérieur. En outre, en désignant par ς_i $(i = 1, 2)$, respectivement par e_i $(i = 1, 2)$, le maximum, respectivement le minimum, de la distance $\overline{Om_i}$, où m parcourt la courbe M_i, la courbe Y_2 sera contenue tout entière à l'intérieur d'un cercle (y compris la circonférence) de centre O et de rayon $\varsigma_1 + \varsigma_2$ et contiendra à son intérieur (y compris la frontière) un cercle de centre O et de rayon $e_1 + e_2$, de même qu'au cas où $M_1 + M_2$ est limité par deux courbes convexes, la courbe I_2 se trouvera contenue tout entière dans un cercle (y compris la circonférence) de centre O et de rayon $\varsigma_1 - e_2$. Enfin, l'aire du domaine compris entre M_1 et Y_2 sera plus grande que l'aire de M_2 de même qu'au cas où $M_1 + M_2$ est limité par deux courbes convexes l'aire du domaine compris entre M_1 et I_2 sera plus grand

[1] Par l'aire d'une courbe convexe nous entendons l'aire du domaine, forcément existant, qui est situé intérieurement à la courbe en question.

que l'aire de M_2; il en résulte qu'au cas où $M_1 + M_2$ est limité par une seule courbe convexe, l'aire du domaine $M_1 + M_2$ sera plus grande que l'aire de M_1 + l'aire de M_2, tandis qu'au cas où $M_1 + M_2$ est limité par deux courbes convexes, l'aire du domaine $M_1 + M_2$ sera $> 2 \cdot$ (l'aire de M_2).

§ 3. Sur l'addition d'une infinité de courbes convexes.

Extension du théorème sur l'addition de deux courbes convexes, démontré au § 2, en un théorème plus générale portant sur l'addition d'un nombre fini arbitraire de courbes convexes. Démonstration de la proposition générale suivante sur l'addition d'une infinité de courbes convexes:

Étant donnée une courbe convexe fermée M_n ($n = 1, 2, \ldots$) contenant l'origine O à son intérieur et telle que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ soit convergente, soit l'aire de $M_1 \geq$ l'aire de M_n ($n = 2, 3, \ldots$); l'ensemble de points $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ sera un domaine (y compris la frontière) limité, ou par une seule courbe convexe fermée Y, ou par deux courbes convexes fermées Y et I dont I se trouvera tout entière intérieurement à Y. En outre nous aurons, en désignant par ς_n et par e_n, respectivement, le maximum et le minimum, respectivement, de la distance $\overline{Om_n}$, pour m_n parcourant M_n, la courbe Y située à l'intérieur d'un cercle (y compris la circonférence) de centre O et de rayon $\sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_n$ et contenant à son intérieur (y compris la frontière) un cercle de centre O et de rayon $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$, de même que nous aurons, au cas où M se trouve limité par les deux courbes Y et I, la courbe I située à l'intérieur d'un cercle (y compris la circonférence) de centre O et de rayon $\varsigma_1 - \sum_{n=2}^{\infty} e_n$. Enfin, la courbe Y entourera la courbe M_1 tout entière et l'aire du domaine compris entre M_1 et Y sera $> \sum_{n=2}^{\infty}$ (aire M_n), de même qu'au cas où M se trouve limité par les deux courbes Y et I, la courbe I sera située tout entière à l'intérieur de la courbe M_1 et de telle sorte que l'aire du domaine compris entre M_1 et I sera $> \sum_{n=2}^{\infty}$ (aire M_n). Par conséquent, si M est limité par la seule courbe Y, l'aire du domaine M sera $> \sum_{n=1}^{\infty}$ (aire M_n), tandis que dans le cas où est limité par les deux courbes convexes Y et I, l'aire du domaine M sera $> 2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty}$ (aire M_n). [De cette proposition il s'ensuit spécialement qu'en supposant $\varsigma_1 \leqq \sum_{n=2}^{\infty} e_n$, ou bien, en faisant l'aire de $M_1 \leqq \sum_{n=2}^{\infty}$ (aire M_n), on aura forcément M limité par une seule courbe convexe fermée.]